

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

# 星际探险

宋方睿

华东师范大学第二附属中学

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

- 1 问题描述**
- 2 抽象模型**
- 3 第一个子问题**
- 4 第二个子问题**
- 5 命题思路和考察点**
- 6 数据设计**
- 7 出题感想和期望得分**
- 8 感谢**
- 9 提问时间**

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考

察点

数据设计

出题感想和期

望得分

感谢

提问时间

众所周知，新世纪的科学很发达，于是小 A 开始了星际探险，他在宇宙中开辟了一片空间，建造了  $N$  个**空间站**，编号分别为  $0 \dots N-1$ ，其中前  $p$  个空间站是他特别偏爱的。这  $N$  个空间站由一些**单向的时空隧道**连接，这些时空隧道都有一个**穿越指数**，用**正整数**表示。如果你在  $T$  时刻处在  $u$  号空间站，那么通过一条穿越指数为  $w$ ，由  $u$  通往  $v$  的时空隧道，你可以在  $T+w$  时刻到达  $v$  号空间站。

小 A 经常从 0 号空间站出发，**依次经过**  $1, 2, 3, \dots, p-2$  **号空间站**到达  $p-1$  号空间站。但这条路线却不一定是到达  $p-1$  的最快路线。他有一台操纵时空隧道的机器，这台机器**每次**可以把某一条时空隧道的穿越指数**增加或减少 1**，但**必须仍然为正整数**。

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考

察点

数据设计

出题感想和期

望得分

感谢

提问时间

小 A 的要求很特殊，他希望通过操作机器，把从 0 号空间站出发，依次经过  $1, 2, 3, \dots, p-2$  号空间站到达  $p-1$  号空间站的这条路线变成最快的路线。也就是说，在所有路线中，这条路线花费的时间最少。他想知道**最少需要操作几次机器**，满足这个要求。

解决了这一问题后，小 A 对他的机器进行了更新。现在，这台机器可以把时空隧道的穿越指数修改为 0 了，但仍然不允许修改出负数。**穿越指数为 0 的时空隧道有特殊的含义，表示这条隧道无法通过，初始时不存在这样的时空隧道。**

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考

察点

数据设计

出题感想和期

望得分

感谢

提问时间

更新后，小 A 开始思考这样一个问题：

有一些时空隧道的集合  $S$  存在这样的性质：把  $S$  中所有时空隧道的穿越指数都修改为 0 后，从 0 号空间站出发，无法到达  $p-1$  号空间站。但任意  $S$  的真子集却不满足这个性质。也就是说，对于  $S$  中任意一条时空隧道，如果不改变它的穿越指数，把  $S$  中除了它之外的所有时空隧道的穿越指数都修改为 0，那么从 0 号空间站出发，仍然能到达  $p-1$  号空间站。我们称满足这个性质的集合  $S$  具有性质  $Z$ ，而  $w(S)$  定义为  $S$  中所有时空隧道的穿越指数之和，即把这些时空隧道的穿越指数改为 0 所需操作机器的次数。

小 A 选择了一个具有性质  $Z$  的集合  $S^0$ ，但可能存在某个具有性质  $Z$  的集合  $S^*$ ， $w(S^*) < w(S^0)$ 。他希望通过操作机器，修改这些时空隧道的穿越指数，使得修改之后，不存在具有性质  $Z$  的集合  $S^*$ ，使得  $w(S^*) < w(S^0)$ 。

同样的，他希望操作机器的次数尽可能少。

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

- 一个有向赋权图  $G$

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

- 一个有向赋权图  $G$
- $w(u, v)$  表示  $u$  到  $v$  的边的权值, 所有  $w \geq 0$

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

- 一个有向赋权图  $G$
- $w(u, v)$  表示  $u$  到  $v$  的边的权值, 所有  $w \geq 0$
- 设定路径:  $(0, 1), (1, 2), \dots, (p-2, p-1)$



星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

- 一个有向赋权图  $G$
- $w(u, v)$  表示  $u$  到  $v$  的边的权值, 所有  $w \geq 0$
- 设定路径:  $(0, 1), (1, 2), \dots, (p-2, p-1)$
- 问题的类型 *TYPE*

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

- 一个有向赋权图  $G$
- $w(u, v)$  表示  $u$  到  $v$  的边的权值, 所有  $w \geq 0$
- 设定路径:  $(0, 1), (1, 2), \dots, (p-2, p-1)$
- 问题的类型  $TYPE$

1 的代价可以把一条边的权值增减 1。权值为 0 有特殊含义, 表示这条边无法通过。第一个子问题 ( $TYPE$  为  $A$ ) 有另外限制, 不允许把边权修改为 0

## 第一个问题的输出

- 使得设定路径成为最短路径的最小修改代价

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考

察点

数据设计

出题感想和期

望得分

感谢

提问时间

## 输入

- 一个有向赋权图  $G$
- $w(u, v)$  表示  $u$  到  $v$  的边的权值, 所有  $w \geq 0$
- 设定路径:  $(0, 1), (1, 2), \dots, (p-2, p-1)$
- 问题的类型  $TYPE$

1 的代价可以把一条边的权值增减 1。权值为 0 有特殊含义, 表示这条边无法通过。第一个子问题 ( $TYPE$  为  $A$ ) 有另外限制, 不允许把边权修改为 0

## 第一个问题的输出

- 使得设定路径成为最短路径的最小修改代价
- 每条边权值的增加或减少量

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

- 一个有向赋权图  $G$
- $w(u, v)$  表示  $u$  到  $v$  的边的权值, 所有  $w \geq 0$
- 设定路径:  $(0, 1), (1, 2), \dots, (p-2, p-1)$
- 问题的类型  $TYPE$

1 的代价可以把一条边的权值增减 1。权值为 0 有特殊含义, 表示这条边无法通过。第一个子问题 ( $TYPE$  为  $A$ ) 有另外限制, 不允许把边权修改为 0

## 第二个问题的输出

- 给出了一个割集, 求使它变成最小割的最小修改代价
- 每条边权值的增加或减少量

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

观察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

类比第一个子问题中的朴素算法，得出如下方法：

## 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$

类比第一个子问题中的朴素算法，得出如下方法：

### 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$

类比第一个子问题中的朴素算法，得出如下方法：

### 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$
- 求出新图的最短路径和  $dist(0, 1, \dots, p-1)$ ，检查两者是否相等

类比第一个子问题中的朴素算法，得出如下方法：

### 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$
- 求出新图的最短路径和  $dist(0, 1, \dots, p-1)$ ，检查两者是否相等
- 如果相等则说明找到了一个解



类比第一个子问题中的朴素算法，得出如下方法：

### 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$
- 求出新图的最短路径和  $dist(0, 1, \dots, p-1)$ ，检查两者是否相等
- 如果相等则说明找到了一个解

枚举量太大。期望得分：10

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

A 3 3 3	1
0 1 1	0
1 2 2	-1
0 2 2	0

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

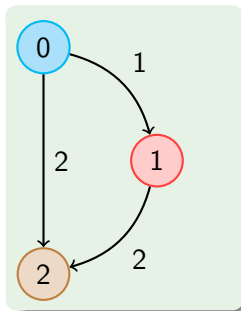
出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

A	3	3	3	1
0	1	1		0
1	2	2		-1
0	2	2		0



## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

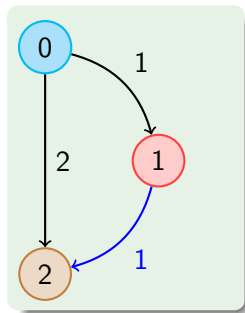
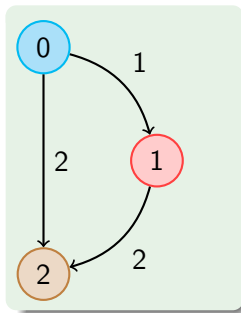
出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

A	3	3	3	1
0	1	1		0
1	2	2		-1
0	2	2		0



## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

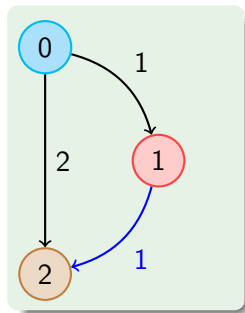
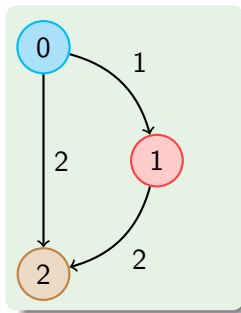
出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

A	3	3	3	1
0	1	1		0
1	2	2		-1
0	2	2		0



## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

5 6 5	2
0 1 2	-1
1 3 3	0
3 4 3	0
0 2 3	1
1 2 3	0
2 3 1	0

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

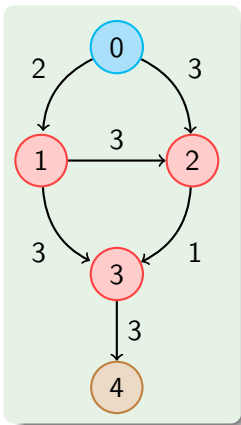
出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

5 6 5	2
0 1 2	-1
1 3 3	0
3 4 3	0
0 2 3	1
1 2 3	0
2 3 1	0



## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

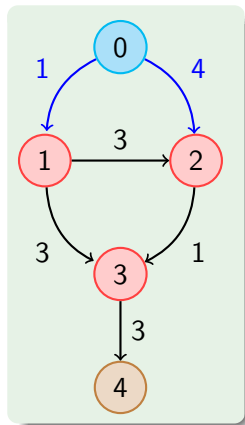
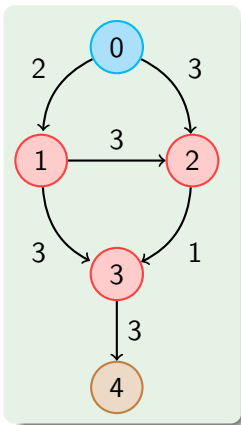
出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

5 6 5	2
0 1 2	-1
1 3 3	0
3 4 3	0
0 2 3	1
1 2 3	0
2 3 1	0





## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

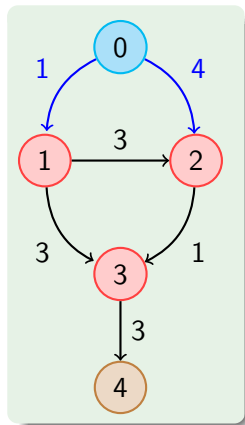
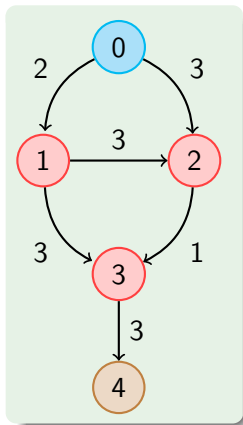
出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

5 6 5	2
0 1 2	-1
1 3 3	0
3 4 3	0
0 2 3	1
1 2 3	0
2 3 1	0



样例给出的修改方案修改的不是设定路径上的边权，我们尝试只修改设定路径上的边权

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

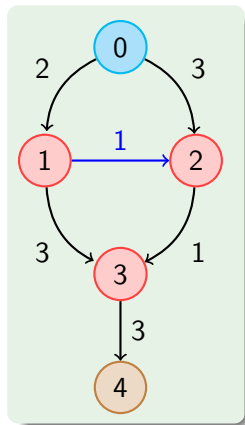
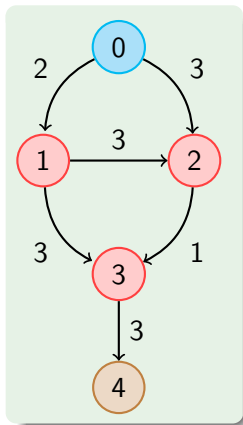
出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入和输出

5 6 5	2
0 1 2	-1
1 3 3	0
3 4 3	0
0 2 3	1
1 2 3	0
2 3 1	0



样例给出的修改方案修改的不是设定路径上的边权，我们尝试只修改设定路径上的边权

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

## 猜想

- 最优修改方案有很多，但有一种方案只修改设定路径上的边权

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 猜想

- 最优修改方案有很多，但有一种方案只修改设定路径上的边权
- 实施该修改方案后，新图中， $0$  沿着设定路径，到每个点  $v$  的路径长度等于原图中  $0$  到  $v$  的最短路径长度

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

## 修改代价的下界

- 对于顶点  $v \in \{0 \dots p-1\}$ , 通过修改边权把  $v$  变成最短路径上的点所需的代价不会小于  $dist(0, 1, \dots, v) - \pi_v$ .

## 修改代价的下界

- 对于顶点  $v \in \{0 \dots p-1\}$ , 通过修改边权把  $v$  变成最短路径上的点所需的代价不会小于  $dist(0, 1, \dots, v) - \pi_v$ .

## 证明方法提示

- 1 的修改代价最多使  $dist(0, 1, \dots, v)$  和最短路径长度的差距减少 1。

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 刚才估计的修改总代价的下界可以取到

- 对于顶点  $1$ ，通过修改边权把它变成最短路径上的点所需要的代价不会小于  $dist(0, 1) - \pi_1$

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 刚才估计的修改总代价的下界可以取到

- 对于顶点 1, 通过修改边权把它变成最短路径上的点所需要的代价不会小于  $dist(0, 1) - \pi_1$
- 把  $w(0, 1)$  修改成  $\pi_1$  就能取到下界



## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 刚才估计的修改总代价的下界可以取到

- 对于顶点  $1$ , 通过修改边权把它变成最短路径上的点所需要的代价不会小于  $dist(0, 1) - \pi_1$
- 把  $w(0, 1)$  修改成  $\pi_1$  就能取到下界
- 要把  $i$  变成最短路径上的顶点, 只需在  $0 \dots i-1$  已经在最短路径上的基础上, 把  $w(i-1, i)$  修改成  $\pi_i - \pi_{i-1}$

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 刚才估计的修改总代价的下界可以取到

- 对于顶点 1, 通过修改边权把它变成最短路径上的点所需要的代价不会小于  $dist(0, 1) - \pi_1$
- 把  $w(0, 1)$  修改成  $\pi_1$  就能取到下界
- 要把  $i$  变成最短路径上的顶点, 只需在  $0 \dots i-1$  已经在最短路径上的基础上, 把  $w(i-1, i)$  修改成  $\pi_i - \pi_{i-1}$
- 根据题意,  $\pi_i - \pi_{i-1} > 0$ , 所以不会修改出 0 或负权边

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

总结，解决第一个子问题的算法如下：

## 算法

- 用堆优化的 Dijkstra 算法求出 0 到所有顶点的最短路径长度  $\pi$

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

总结，解决第一个子问题的算法如下：

### 算法

- 用堆优化的 Dijkstra 算法求出 0 到所有顶点的最短路径长度  $\pi$
- 输出  $\pi_{p-1}$

总结，解决第一个子问题的算法如下：

### 算法

- 用堆优化的 Dijkstra 算法求出 0 到所有顶点的最短路径长度  $\pi$
- 输出  $\pi_{p-1}$
- 输出  $\pi_1 - \pi_0, \pi_2 - \pi_1, \dots, \pi_{p-1} - \pi_{p-2}$

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

我们再来看第二个子问题

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 变量含义约定

- $G = (V, E)$ ,  $c$  是容量矩阵

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 变量含义约定

- $G = (V, E)$ ,  $c$  是容量矩阵
- $S^0$  为给出的割集中  $0$  沿着残流网络的边可以到达的点集,  $T^0 = V - S^0$ , 那么题目中给出的割集就是  $(S^0, T^0)$



星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 变量含义约定

- $G = (V, E)$ ,  $c$  是容量矩阵
- $S^0$  为给出的割集中  $0$  沿着残流网络的边可以到达的点集,  $T^0 = V - S^0$ , 那么题目中给出的割集就是  $(S^0, T^0)$
- $c(S, T)$  是割  $(S, T)$  的权值, 最小割的权值为  $W$ 。

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$
- 求出新图的最大流 (最小割) 和给定割集的权值，检查两者是否相等

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$
- 求出新图的最大流 (最小割) 和给定割集的权值，检查两者是否相等
- 如果相等则说明找到了一个解

## 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$
- 求出新图的最大流 (最小割) 和给定割集的权值，检查两者是否相等
- 如果相等则说明找到了一个解

枚举量太大。期望得分：10

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 朴素算法

- 从 0 开始，从小到大迭代总的修改代价  $ans$
- 枚举每条边的权值增减量，保证修改代价恰好等于  $ans$
- 求出新图的最大流 (最小割) 和给定割集的权值，检查两者是否相等
- 如果相等则说明找到了一个解

枚举量太大。期望得分：10

这两个子问题有什么关联？

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

类比第一个子问题（最短路模型），猜测如下结论成立：

### 修改代价的下界

通过修改边权把  $S^0$  变成最小割所需的代价不会小于  $c(S^0, T^0) - W$ 。



星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

类比第一个子问题（最短路模型），猜测如下结论成立：

### 修改代价的下界

通过修改边权把  $S^0$  变成最小割所需的代价不会小于  $c(S^0, T^0) - W_0$ 。

### 证明方法提示

类比第一个子问题，1 的修改代价最多使给定割集和最小割的差值减少 1

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

■ 题目要求通过修改边的容量来把  $(S^0, T^0)$  变成最小割

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

- 题目要求通过修改边的容量来把  $(S^0, T^0)$  变成最小割
- 它也必须是  $G' = (V, E - (T^0, S^0))$  的最小割

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

- 题目要求通过修改边的容量来把  $(S^0, T^0)$  变成最小割
- 它也必须是  $G' = (V, E - (T^0, S^0))$  的最小割
- 我们把  $(T^0, S^0)$  的边都删除，为方便起见，仍然用  $G$  来表示生成的图， $c$  是容量矩阵

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

- 令  $f^*$  为  $G$  的最大流方案。最小割等于  $S^0$  到  $T^0$  的净流
- $$f^*(S^0, T^0) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^* - \sum_{(u,v) \in (T^0, S^0)} f_{uv}^* = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^*$$

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

- 令  $f^*$  为  $G$  的最大流方案。最小割等于  $S^0$  到  $T^0$  的净流  
$$f^*(S^0, T^0) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^* - \sum_{(u,v) \in (T^0, S^0)} f_{uv}^* = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^*$$
- 所以  $c(S^*, T^*) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^*$

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

- 令  $f_*$  为  $G$  的最大流方案。最小割等于  $S^0$  到  $T^0$  的净流  
$$f^*(S^0, T^0) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^* - \sum_{(u,v) \in (T^0, S^0)} f_{uv}^* = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^*$$
- 所以  $c(S^*, T^*) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^*$
- 推出  $c(S^0, T^0) - c(S^*, T^*) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} (c_{uv} - f_{uv}^*)$

- 令  $f_*$  为  $G$  的最大流方案。最小割等于  $S^0$  到  $T^0$  的净流  

$$f^*(S^0, T^0) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^* - \sum_{(u,v) \in (T^0, S^0)} f_{uv}^* = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^*$$
- 所以  $c(S^*, T^*) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} f_{uv}^*$
- 推出  $c(S^0, T^0) - c(S^*, T^*) = \sum_{(u,v) \in (S^0, T^0)} (c_{uv} - f_{uv}^*)$
- 也就是说,  $c(S^0, T^0)$  和  $c(S^*, T^*)$  的差值, 仅在  $(S^0, T^0)$  中的边中体现出来



## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

- 如果我们取如下的容量矩阵：

$$c_{uv}^* = \begin{cases} f_{uv}^* & \text{for all } (u, v) \in (S^0, T^0) \\ c_{uv} & \text{for all } (u, v) \notin (S^0, T^0) \end{cases}$$

- 如果我们取如下的容量矩阵：

$$c_{uv}^* = \begin{cases} f_{uv}^* & \text{for all } (u, v) \in (S^0, T^0) \\ c_{uv} & \text{for all } (u, v) \notin (S^0, T^0) \end{cases}$$

- 那么  $f^*$  仍是最大流， $(S^*, T^*)$  仍是最小割，而  $(S^0, T^0)$  也成为最小割了

- 如果我们取如下的容量矩阵：

$$c_{uv}^* = \begin{cases} f_{uv}^* & \text{for all } (u, v) \in (S^0, T^0) \\ c_{uv} & \text{for all } (u, v) \notin (S^0, T^0) \end{cases}$$

- 那么  $f^*$  仍是最大流， $(S^*, T^*)$  仍是最小割，而  $(S^0, T^0)$  也成为最小割了
- 可以验证，这个方案的修改代价是  $c(S^0, T^0) - c(S^*, T^*)$ ，正是修改代价的下界

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

感谢

提问时间

总结，解决第二个子问题的算法如下：

## 算法

- 根据题目给出的割集  $(S^0, T^0)$  的边求出  $S^0$  和  $T^0$  分别包含哪些顶点

总结，解决第二个子问题的算法如下：

### 算法

- 根据题目给出的割集  $(S^0, T^0)$  的边求出  $S^0$  和  $T^0$  分别包含哪些顶点
- 删除所有  $(T^0, S^0)$  中的边

总结，解决第二个子问题的算法如下：

### 算法

- 根据题目给出的割集  $(S^0, T^0)$  的边求出  $S^0$  和  $T^0$  分别包含哪些顶点
- 删除所有  $(T^0, S^0)$  中的边
- 求出新图的最大流  $f$

总结，解决第二个子问题的算法如下：

### 算法

- 根据题目给出的割集  $(S^0, T^0)$  的边求出  $S^0$  和  $T^0$  分别包含哪些顶点
- 删除所有  $(T^0, S^0)$  中的边
- 求出新图的最大流  $f$
- 对于原图的每一条边  $(u, v)$ ，如果  $(u, v) \in (S^0, T^0)$ ，则修改后的容量（穿越指数）为  $f_{uv}$ ，否则容量不变。

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

B 8 11 4

+ 0 1 3

- 1 2 2

- 2 3 1

- 0 4 1

+ 4 5 2

- 5 3 3

- 0 6 2

- 6 7 1

+ 7 3 2

- 2 0 3

- 5 4 2



## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

考察点

数据设计

出题感想和期望得分

期望得分

感谢

提问时间

## 输入

B 8 11 4

+ 0 1 3

- 1 2 2

- 2 3 1

- 0 4 1

+ 4 5 2

- 5 3 3

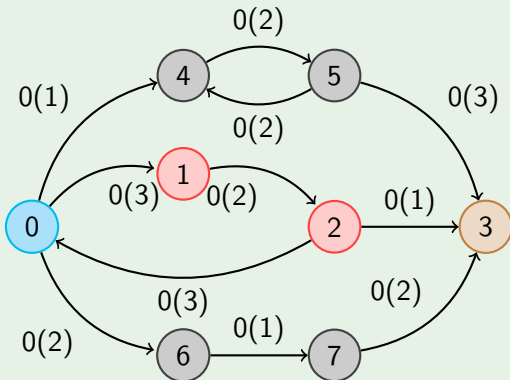
- 0 6 2

- 6 7 1

+ 7 3 2

- 2 0 3

- 5 4 2



原图转化成的流网络。图中边上的信息为：流量 (容量)

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

B 8 11 4

+ 0 1 3

- 1 2 2

- 2 3 1

- 0 4 1

+ 4 5 2

- 5 3 3

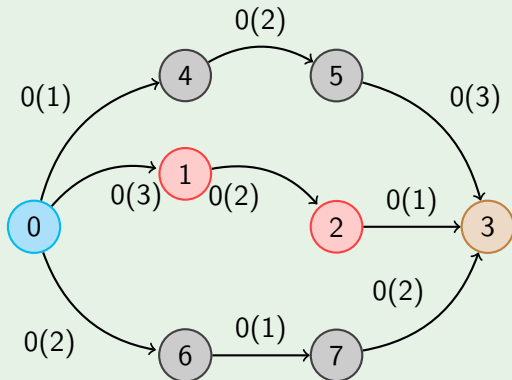
- 0 6 2

- 6 7 1

+ 7 3 2

- 2 0 3

- 5 4 2

删除  $(T^0, S^0)$  中的边

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

考察点

数据设计

出题感想和期望得分

期望得分

感谢

提问时间

## 输入

B 8 11 4

+ 0 1 3

- 1 2 2

- 2 3 1

- 0 4 1

+ 4 5 2

- 5 3 3

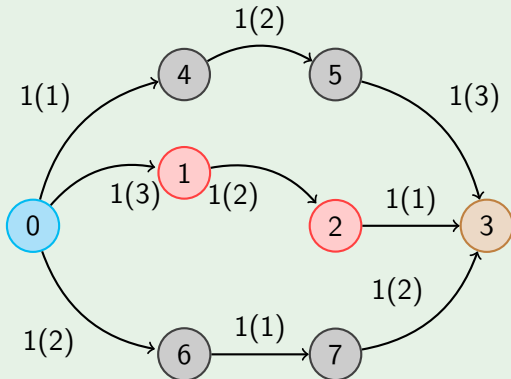
- 0 6 2

- 6 7 1

+ 7 3 2

- 2 0 3

- 5 4 2



求出一个最大流方案

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 输入

B 8 11 4

+ 0 1 3

- 1 2 2

- 2 3 1

- 0 4 1

+ 4 5 2

- 5 3 3

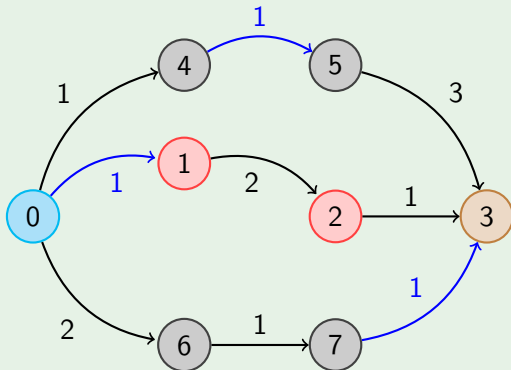
- 0 6 2

- 6 7 1

+ 7 3 2

- 2 0 3

- 5 4 2



建立的新图中，把  $(S^0, T^0)$  中边的权值改为对应的流量即可

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 命题思路

- SGU 206 Roads

## 考察点

- 最短路
- 网络流
- 分析问题、推理的能力

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 命题思路

- SGU 206 Roads
- 变换到最短路模型

## 考察点

- 最短路
- 网络流
- 分析问题、推理的能力

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 命题思路

- SGU 206 Roads
- 变换到最短路模型
- 变换到网络流模型

## 考察点

- 最短路
- 网络流
- 分析问题、推理的能力

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考

察点

数据设计

出题感想和期

望得分

感谢

提问时间

本题数据分为两部分，子问题一和子问题二，每一部分有三种类型，如下所示：

- 10%，最短路， $N \leq 6$ ,  $M \leq 12$ ,  $w \leq 5$
- 20%，最短路， $N \leq 1000$ ,  $M \leq 20000$ ，用时间复杂度为  $O(N^2)$  的朴素 Dijkstra 算法能得分
- 10%，最短路， $N \leq 30000$ ,  $M \leq 600000$ ，需要用时间复杂度为  $O(M \log N)$  或更低的堆优化的 Dijkstra 算法。
- 10%，最小割， $N \leq 6$ ,  $M \leq 12$ ,  $w \leq 5$
- 30%，最小割， $N \leq 100$ ,  $M \leq 2000$
- 20%，最小割， $N \leq 300$ ,  $M \leq 6000$

对于每一个子问题，使用朴素算法、标准算法、实现不够高效的标准算法都能获得相应的分数。



星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 数据构造方式

数据构造方式为先生成一条链

$(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots, (p-2, p-1)$ , 然后把  $p \dots N-1$  分到若干集合  $A_0, A_1, \dots, A_{p-2}$ , 其中集合  $A_i$  中的顶点只和本集合中的点以及  $i$  和  $i+1$  有边相连; 而对于  $0 \dots p-1$  中的点  $i$ , 只和  $i-1$ 、 $i+1$ 、 $A_{i-1}$ 、 $A_i$  有边相连。这样能够保证  $\pi_0 < \pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_{p-1}$ 。

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

## 出题感想和期望得分

此题有两个子问题，看似并不相关，但得出算法的推理过程却有着紧密的联系。其中的最小割模型，如果没有最短路模型的结论，是很难猜出正确的构造方案的。但本题的编程实现较为简单，复杂的思维过程之后只需要实现一个堆优化 Dijkstra 算法和网络流算法，而这两者是基本功，参加 NOI 的大多数选手都能熟练掌握的。

以 NOI 为标准，此题为难题，平均得分为 10~20 分。有少部分选手能得到 50~60 分，个别选手获得满分。

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

■ 感谢中国计算机协会提供这个交流平台

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

- 感谢中国计算机协会提供这个交流平台
- 感谢复旦大学的水雨轩参与讨论此题

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

- 感谢中国计算机协会提供这个交流平台
- 感谢复旦大学的水雨轩参与讨论此题
- 感谢华东师大二附中的冯丹、蔡心瑗提供对拍程序

## 星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

- 感谢中国计算机协会提供这个交流平台
- 感谢复旦大学的水雨轩参与讨论此题
- 感谢华东师大二附中的冯丹、蔡心瑗提供对拍程序
- 感谢老师和上海队的各位同学

星际探险

宋方睿

问题描述

抽象模型

第一个子问题

朴素算法

分析样例

猜想和证明

标准算法

第二个子问题

朴素算法

分析

标准算法

标准算法的实例

命题思路和考察点

数据设计

出题感想和期望得分

感谢

提问时间

欢迎大家提问